

# SOLUSI NUMERIK UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NAVIER-STOKES DALAM SILINDER SIRKULER

Muh. Fachrul Latief

Jurusan Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Gorontalo

Email : [muh.fachrul@ung.ac.id](mailto:muh.fachrul@ung.ac.id)

## ABSTRAK

Telah dilakukan kajian studi numerik tentang aliran fluida mampat dua dimensi yang tunak melewati kaskade pada silinder sirkuler. Aliran fluida tersebut dideskripsikan oleh persamaan Navier-Stokes yang dituliskan dalam fungsi aliran dan vortisitas yang diselesaikan dengan metode kolokasi Chebychev dalam satu arah dan metode beda hingga (*finite-difference*) orde tinggi dalam arah lainnya. Selain itu, pemecahan langsung juga akan dikombinasikan dengan linearisasi Newton-Raphson untuk menyelesaikan persamaan diskrit. Solusi aliran diperoleh untuk bilangan Reynolds yang jauh lebih besar untuk berbagai lebar celah antara silinder. Solusi yang diperoleh adalah 3 jenis yang berbeda yang bergantung pada celahnya. Perbandingan dengan teoritis untuk berbagai besaran aliran menunjukkan hasil yang baik, terutama untuk kasus dengan lebar celahnya yang sempit.

**Kata Kunci:** *Solusi Numerik, Navier-Stokes, Slinder Sirkuler*

## PENDAHULUAN

Solusi dari persamaan Navier-Stokes untuk bilangan Reynolds yang nilainya besar merupakan bidang yang sangat menarik untuk dikaji bagi para fisikawan yang bergelut di bidang teori dan analisis numerik. Terlepas dari banyaknya teknik dan algoritma yang telah dikembangkan, maka dapat diperoleh solusi yang cukup akurat dari persamaan tersebut untuk bilangan Reynolds yang nilainya besar meskipun dapat menimbulkan kesulitan dan analisis yang cukup kompleks. Hal ini dikarenakan kesesuaian skala *body-system* dan berbagai daerah tipis yang akan diselesaikan. Salah satu masalah klasik yang masih dijumpai dalam topik tersebut perhitungan aliran fluida tunak yang mampat dan melewati sebuah silinder sirkuler. Di mana tantangan dari masalah tersebut adalah untuk

memperoleh gambaran tentang struktur aliran dalam batas bilangan Reynolds tinggi yang melewati tebing umum. Untuk analisis numerik, resolusi merupakan fitur penting dari aliran yang ditelaah yang menjadi salah satu tantangan dalam mengatasi masalah tersebut.

Namun terlepas dari berbagai metode numerik yang digunakan dan perhitungan aliran yang melewati silinder sirkuler, maka hasil yang akurat dapat diperoleh dengan mempertimbangkan syarat bilangan Reynolds ( $R = U d/v$ , di mana  $U$  adalah kecepatan seragam aliran relatif terhadap silinder pada jarak yang jauh,  $d$  adalah diameter silinder dan  $v$  adalah viskositas kinematika fluida) hingga sekitar 800 (Fornberg, 1991).

Salah satu aspek penting yang terkait dengan masalah aliran tunak adalah deskripsi aliran yang benar untuk bilangan Reynolds

yang tinggi. Hal ini menjadi kontroversi yang cukup komplis pada penentuan area tersebut. Aliran fluida yang melewati sebuah silinder menjadi tidak stabil dan mengalami turbulen pada bilangan Reynolds yang cukup rendah. Oleh karena itu, untuk menghitung aliran tunak maka diperlukan penjelasan yang lebih lanjut sehingga dapat diperoleh solusi yang akurat sebelum terjadi penyimpangan dari keadaan tunaknya. Selain itu, alasan lain yang menjadi masih menjadi masalah adalah adanya sebagian besar teori yang simptotik untuk kasus ini yang didasarkan pada deskripsi aliran yang stabil. Dengan demikian, maka dikembangkan metode-metode numerik lainnya untuk dapat diterapkan dalam menyelidiki aliran lainnya di mana tetap aliran tunak yang menjadi perhatian utamanya.

Beberapa teori tentang aliran tunak yang melewati silinder sirkuler telah diterima yang konsisten dengan peningkatan bilangan Reynolds, di mana aliran fluida yang terpisah dari permukaan silindernya dan terbentuk pusaran di belakang silinder. Salah satu fokus utama dari banyaknya studi teoritis tentang aliran tunak yang melewati silinder sirkuler adalah untuk mencoba memperoleh deskripsi pemisahan dan struktur pusaran dalam batas bilangan Reynolds yang nilainya tinggi secara asimptotik (Chernyshenko, 1998). Tinjauan tersebut mendeskripsikan struktur aliran fluida yang cukup rumit dan muncul pada aliran tunak yang melewati pada tebing, terkhusus aliran yang melewati sebuah silinder sirkuler dengan bilangan Reynolds yang tinggi. Selain

itu, hal yang penting juga diperhitungkan saat melakukan perhitungan numerik adalah skala *body-system* dan skala pusaran yang menjadi sorotan utama dalam masalah ini. Pertama pada skala *body-system*, gradien tekanan akan diteruskan pada bagian *body-system* yang menyebabkan pemisahan batas lapisannya. Pada kenyataannya secara lokal di dekat titik pemisahan, gradien tekanan akan menjadi tunggal seperti  $O(R^{-1/32}(s_0 - s)^{-1/2})$ , di mana  $s$  adalah jarak sepanjang permukaan benda dan  $s_0$  adalah titik pemisahan. Perilaku ini memastikan bahwa lapisan batas terpisah dengan halus dari *body-system* (Smith, 1979). Aliran yang tidak kental (*inviscid*) secara lokal di dekat titik pemisahan dapat dijelaskan oleh teori aliran bebas Kirchhoff (Kirchhoff, 1869). Sedangkan pada skala pusaran, fitur yang dominan adalah pusaran yang bentuknya membesar yang terdiri dari sepasang daerah dengan *streamline* tertutup dengan viskositas yang konstan. Pada skala pusaran ini, biasanya pusaran silinder akan muncul sebagai titik. Deskripsi fitur pusaran inilah yang paling banyak menimbulkan kebingungan dan kontroversi bagi ilmuwan fisika di bidang teoritis dan analisis numerik.

Salah satu orang pertama yang mencoba untuk mendeskripsikan fitur aliran pusaran adalah Batchelor pada tahun 1965 dengan mengusulkan bahwa dimensi dari pusaran tetap  $O(1)$  dengan batas  $R \rightarrow \infty$ . Selanjutnya pada tahun 1965, Acrivos dkk. memberikan saran lain dengan mengasumsikan panjang pusaran dapat meningkat secara linear seiring

dengan meningkatnya bilangan Reynolds, sedangkan lebar pusaran akan menjadi tetap  $O(1)$ . Hal ini dilatarbelakangi oleh hasil eksperimen mereka yang menggunakan pelat *splitter* yang berada di belakang silinder. Kedua kajian ini memberikan kesimpulan pada ketidakkonsistenan dalam menjelaskan secara teoritis terkait aliran fluida yang lebih rinci dan detail.

Selain itu, Smith dan Sychev telah mengkaji tentang aliran fluida yang mampat melewati tebing dari perspektif teoritis. Mereka telah mengembangkan teori yang asimptotik dengan didasarkan pada perluasan teori aliran bebas Kirchhoff (Sychev, 1967,1982). Pada makalah Smith telah memberikan deskripsi teoritis yang paling rinci terkait medan aliran fluida serta catatan sejarah dari perkembangan aliran fluida yang termampatkan. Smith mengemukakan bahwa panjang pusaran akan meningkat secara linier sebanding dengan meningkatnya bilangan Reynolds sedangkan lebar pusaran akan meningkat seperti  $O(R^{1/2})$ .

Pada tahun 1980, salah satu dari beberapa kajian yang dihasilkan oleh Fornberg memperoleh solusi numerik yang akurat untuk masalah aliran bilangan Reynolds tinggi melewati silinder yang terisolasi (Fornberg, 1980). Fornberg berhasil mendapatkan solusi untuk bilangan Reynolds sampai nilai 300. Dimensi pusaran ditemukan meningkat secara linear dengan bilangan Reynolds, konsisten dengan teori Smith. Hal ini telah ditunjukkan oleh Fornberg untuk bilangan Reynolds yang

lebih besar dari 300, maka pusaran akan meningkat secara linear di kedua dimensi tersebut. Dalam kajian terakhir ini juga diperdebatkan tentang pentingnya kehati-hatian yang ekstrem dalam mengimplementasikan kondisi batas, pilihan algoritma numerik, studi *independency grid* dan sebagainya. Selain itu, Fornberg juga menunjukkan bahwa gelembung bangun memiliki panjang pusaran  $O(R)$  dengan lebar  $O(R^{1/2})$  hingga sekitar  $R = 300$  dan untuk selanjutnya panjang dan lebar pusaran akan bertambah secara linear seiring dengan bertambahnya bilangan Reynolds.

Paper Taganov adalah salah satu yang paling awal menjelaskan teori aliran pusaran dengan lebar dan panjang yang meningkat seiring peningkatan bilangan Reynolds (Taganov, 1968). Selanjutnya Sadovskii membuat kalkulasi berdasarkan teori ini dan memperoleh hasil untuk satu parameter aliran viskositas potensial yang sekarang disebut dengan vortisitas Sadovskii. Menurut Fornberg, Pregnire dan Smith juga mengemukakan teori yang telah direvisi berdasarkan model Sadovskii di mana dimensi pusaran akan meningkat secara linear seiring dengan bilangan Reynolds. Akan tetapi, tetap banyak aspek dari teori yang belum bisa terpecahkan. Kemudian Chernyshenko pada tahun 1988 dan Chernyshenko bersama Castro pada tahun 1966 berhasil memecahkan sejumlah masalah teknis yang luar biasa dan memberikan prediksi untuk perilaku beberapa properti global seperti tarikan, vortisitas

pusaran, dan sebagainya di mana semua merupakan fungsi dari bilangan Reynolds.

Selanjutnya topik aliran pada geometri silinder dapat diperluas ke geometri lain seperti aliran fluida yang melewati pelat datar yang cenderung normal ke aliran yang datang. Fornberg telah mengembangkan kalkulasi untuk mendapatkan solusi akurat dari persamaan Navier-Stokes untuk aliran yang melewati kaskade silinder sirkuler. Hasil numeriknya menunjukkan bahwa untuk lebar celah yang besar di antara silinder, maka pusaran di belakang setiap silinder akan bertambah besar dengan meningkatnya bilangan Reynolds, hal ini sejalan dengan prediksi teoritis oleh Chernyshenko dan Castro. Di sisi lain, perubahan besar dalam sifat larutan terjadi untuk lebar celah yang kecil dan sedang. Sedangkan untuk lebar celah silinder yang sangat kecil, maka pusaran akan memanjang dan ramping dengan lebar tetap konstan seiring dengan meningkatnya bilangan Reynolds. Solusi ini hampir sama dengan solusi yang telah diperoleh Archivos dkk. Perhitungan numerik yang telah ditunjukkan bahwa untuk lebar celah sedang, maka pusaran akan memanjang dan ramping namun ada perubahan pada properti tersebut di dekat batas sambungan di mana untuk celah besar akan muncul dan tampak.

Selain itu, kajian tentang solusi dari persamaan Navier-Stokes yang dijelaskan secara rinci dalam geometri kaskade ditelaah oleh Tang dan Morton (1990), Natarjan (1993), Fornberg dan Acrivos (1993) yang

masing-masing menegaskan solusi aliran baru secara kualitatif untuk lebar celah di atas nilai kritis tertentu. Untuk lebar celah yang besar, maka sifat solusi secara kualitatif serupa dengan yang diperoleh Fornberg untuk deretan silinder. Mereka menyarankan bahwa perilaku aliran mungkin akan bersifat umum untuk setiap *bluff body* yang simetris dan juga menyarankan perbedaan mendasar antara kasus di mana distribusi vortisitas dalam aliran pemisahan awal ditentukan dalam lapisan batas yang terpasang di depan *bluff body*, dan kasus ini telah ditelaah oleh Milos dan Archivos (1987) di mana distribusi vortisitas ditentukan sebagai bagian dari kondisi batas untuk aliran yang masuk ke kaskade. Selanjutnya Castro (2002) juga telah memperluas kasus sebelumnya untuk aliran fluida yang melewati kaskade dalam geometri pelat datar ke cairan yang bertingkat.

Aliran yang dipertimbangkan dalam makalah ini adalah aliran yang melewati kaskade silinder melingkar yang ditempatkan dalam aliran yang homogen dan seragam. Selain diperoleh bilangan Reynolds, diperkenalkan parameter tambahan yakni  $W$  yang merupakan lebar celah antar silinder. Teori asimtotik yang disebut aliran kaskade ini kurang berkembang dibanding dengan kasus *body* yang terisolasi. Meskipun demikian, beberapa hasil yang telah disajikan dalam batas  $R \rightarrow \infty$  dengan  $W = O(R)$ . Struktur dari sistem yang mirip dengan kontak silinder yang terisolasi dan dijelaskan oleh Chernyshenko dan Castro (1993). Untuk  $W = O(1)$ , maka

diperlukan perlakuan numerik dengan hasil yang bisa diprediksi langsung untuk kasus  $W/R, W \gg 1, R \gg 1$ .

Salah satu dari tujuan studi ini adalah menyajikan teknik yang agak tidak konvensional namun kuat untuk menjelaskan solusi dari persamaan Navier-Stokes yang stabil dan beberapa persamaan lainnya yang serupa. Algoritma numerik yang digunakan adalah *finite difference* (metode beda hingga) orde tinggi dalam satu arah yang dikombinasikan dengan kolokasi spektral pada arah lainnya. Selain itu, tujuan lainnya adalah untuk menyajikan beberapa hasil baru yang diperoleh dengan menggunakan teknik aliran melewati kaskade silinder sirkuler pada bilangan Reynolds yang besar.

**PERUMUSAN MASALAH**

**Setting Kajian dan Subyek Tindakan**

Kaskade dalam hal ini diasumsikan sebagai bilangan yang tak terhingga dari silinder sirkuler dengan jari-jari yang tidak berdimensi, sehingga dapat dianggap bahwa dalam aliran yang seragam dengan pusat-pusat silinder yang terpisah dengan lebar yang tidak berdimensi  $W$ . Pada jarak yang jauh dari kaskade, fluida dapat diasumsikan bergerak dengan kecepatan konstan  $U$  dalam arah  $x$ -

positif dan simetri dalam arah  $y$ , maka hanya perlu ditinjau aliran dalam dua dimensi di daeran  $0 \leq y \leq W/2$ .

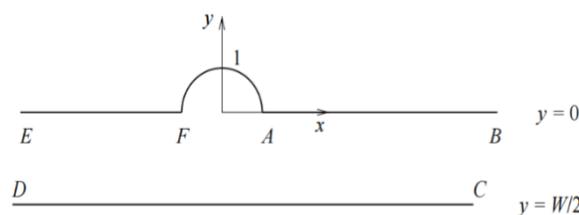
Selanjutnya, tinjau persamaan Navier-Stokes dalam fungsi aliran vortisitas ( $\omega$ ) dan fungsi alirannya ( $\psi$ ) untuk formulasi silinder dengan jari-jari yang tak berdimensi 1 dan bilangan Reynolds  $R$  (berdasarkan diameter silinder) dapat dituliskan sebagai:

$$\psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y = \frac{2}{R} \nabla^2 \omega \tag{1}$$

$$\nabla^2 \psi + \omega = 0 \tag{2}$$

di sini  $R = U d/v$ , dengan  $U$  adalah kecepatan yang seragam relatif terhadap silinder pada jarak yang jauh dari silinder,  $d$  adalah diameter silinder dan  $v$  adalah viskositas kinematika fluida.

Karena sifat simetrinya, maka dapat dibatasi fokus kajian pada daerah aliran yang ditunjukkan oleh gambar 2. Persamaan harus diselesaikan berdasarkan syarat batas dengan asumsi bahwa tidak ada slip pada permukaan benda. Sebagai tambahan, pada dua garis simetri  $y = 0$  dan  $y = \frac{W}{2}$ , mempunyai syarat adalah  $\psi = \omega = 0$  pada  $y = 0, |x| > 1$  dan  $\psi = W/2, \omega = 0$  pada  $y = W/2$ . Dengan demikian,  $\psi \rightarrow y$  dan  $\omega = 0$  berlaku sebagai  $x \rightarrow \pm\infty$ .



**Gambar 1. Sketsa Domain Fisik**

Persamaan dengan kondisi batas harus diselesaikan untuk memperoleh ungkapan fungsi aliran  $\psi$  dan vortisitas  $\omega$  untuk berbagai nilai bilangan Reynolds  $R$  serta parameter tambahan  $W$ . Persamaan (1) dan persamaan (2) dapat diselesaikan terlebih dahulu dengan mengubah domain fisis pada bidang  $(x, y)$  menjadi strip di domain  $(\xi, \eta)$ . Pemetaan konformal dilakukan seperti yang telah dijelaskan oleh Fornberg.

Metode spektral beda-hingga campuran digunakan untuk menyelesaikan persamaan (1) dan (2) dengan metode beda hingga orde empat dalam arah  $\xi$  dan kolokasi Chebychev dalam arah  $\eta$ . Ini sangat berbeda dengan metode beda hingga orde kedua yang telah dijelaskan oleh Fornberg.

**Transformasi Pemetaan**

Pemetaan konformal digunakan untuk mengubah domain komputasi dasar menjadi wilayah persegi panjang di mana pembuatan pemetaan dari bidang kompleks  $(X = x + iy)$  ke bidang  $(Z = \xi + i\eta)$ , maka diperlukan suatu faktor tambahan  $J$  dimasukkan ke dalam salah satu persamaan pengatur, sehingga persamaan (1) dan (2) menjadi:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \omega}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2} R \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right\} = 0 \quad (3)$$

$$\left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right\} J + \omega = 0 \quad (4)$$

di mana  $J = |dZ / dX|$  yang disebut sebagai transformasi Jacobian.

Dalam kajian ini, pemetaan yang digunakan untuk menentukan domain komputasi asli  $A, B, C, D, E, F$  pada bidang- $X$  (pada gambar 2) ke strip  $A', B', C', D', E', F'$  pada bidang-  $Z$  (pada gambar 3). Transformasinya sama seperti yang ditunjukkan oleh Fornberg dengan  $T = \left(\frac{\pi}{W}\right) \coth\left(\frac{\pi Z}{W}\right)$  sehingga diperoleh hubungan:

$$X = \frac{V}{W} \left\{ Z + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k T^{2k-1} \right\} \quad (5)$$

di mana  $V$  dan  $\alpha_k$  adalah sebuah konstanta real dan dipilih sehingga memenuhi  $X = e^{i\theta}$  yang dipetakan ke bentuk  $\eta = 0$  dan  $-2 \leq \xi \leq 2$  untuk  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Juga untuk ungkapan  $y = W/2$  yang dipetakan ke  $\eta = V/2$ . Nilai dari  $V$  dapat diperoleh dengan menetapkan nilai  $X = 1$  dan  $Z = 2$ . Dengan demikian, koefisien  $\alpha_k$  dapat dihitung dengan mudah seperti yang telah dilakukan oleh Fornberg. Berikut tabel 1 untuk nilai  $W, V$  dan  $\alpha_k$  yang telah dihitung.

**Tabel 1. Nilai  $\alpha$  untuk  $W = 5, 10, 20, 50, 100,$  dan  $1000$**

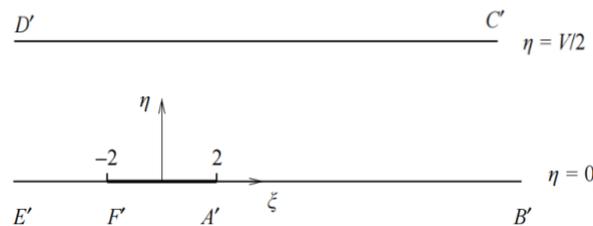
<b>W</b>	<b>5</b>	<b>10</b>	<b>20</b>	<b>50</b>	<b>100</b>	<b>1000</b>
$V$	4.356406392 63556	9.67308621426 570	19.83577431 23441	49.9342199 2520	99.96710348 2	999.9967
$\alpha_1$	1.153176370 61164	1.03404007826 48907	1.008293213 66501	49.9342199 2520	1.000329095 10268	1.00000328 9878
$\alpha_2$	-0.00409422 60731	-0.0002241793 310169	-0.00001364 25577	-3.468006 $\times 10^{-7}$	-2.165360 $\times$ $10^{-8}$	-2 $\times 10^{-12}$
$\alpha_3$	0.000155995 80186	2.108785214 $\times$ $10^{-6}$	3.206019 $\times$ $10^{-8}$	1.30 $\times$ $10^{-10}$	0.1 $\times 10^{-12}$	-0.1 $\times$ $10^{-8}$

$\alpha_4$	$-6.2394386 \times 10^{-6}$	$-2.08276999 \times 10^{-8}$	$-7.91088 \times 10^{-11}$	$-5.15 \times 10^{-14}$	$-2.0 \times 10^{-16}$	$-2.0 \times 10^{-24}$
$\alpha_5$	$2.5171939 \times 10^{-7}$	$2.0778269 \times 10^{-10}$	$1.972 \times 10^{-13}$	$2.0 \times 10^{-17}$	$2. \times 10^{-20}$	$2 \times 10^{-30}$
$\alpha_6$	$-9.5370049 \times 10^{-9}$	$-2.0689 \times 10^{-12}$	$-4.9 \times 10^{-16}$	$-8.0 \times 10^{-21}$	$-2. \times 10^{-24}$	$-2 \times 10^{-36}$

Pemetaan yang telah dijelaskan sebelumnya dapat diambil pada suatu daerah di bidang-  $X$  dan mengubahnya menjadi strip pada bidang- $Z$  dengan memperhatikan gambar 2 dan syarat batas berikut:

- Pada garis  $E'F'$  : ( $\xi < -2, \eta = 0$ )  
 $\psi = 0, \omega = 0.$
- Pada garis  $A'B'$  : ( $\xi > 2, \eta = 0$ )  
 $\psi = 0, \omega = 0.$

- Pada garis  $F'A'$  : ( $|\xi| \leq 2, \eta = 0$ )  
 $\psi = 0, \psi_\eta = 0.$
- Pada garis  $E'D'$  : ( $\xi = -\infty$ )  
 $\psi = \eta, \omega = 0, \psi_\xi = 0.$
- Pada garis  $B'C'$  : ( $\xi = \infty$ )  
 $\psi = \eta, \omega = 0, \psi_\xi = 0.$
- Pada garis  $D'C'$  : ( $\eta = V/2$ )  
 $\psi = W/2, \omega = 0.$



Gambar 2. Sketsa Transformasi Domain

Karena syarat batas pada setiap resolusinya berbeda pada masing-masing bagian wilayah, maka perlu dipertimbangkan transformasi yang lebih lanjut dalam arah  $\xi$  sehingga digunakan  $\xi = g(\tau)$  di mana  $g(\tau)$  adalah kombinasi dari kubik dan spline kuintik (lihat gambar 4). Dalam kajian ini menggunakan kisi-kisi dengan spasi yang sama pada bidang- $\tau$ . Pemetaan pada bidang- $Z$  dan bidang ini merupakan peregangan grid yang independen dan dijelaskan sebagai berikut. Untuk  $\tau < -2$ , maka:

$$g(\tau) = a_0 + a_1(\tau + 2) + a_2(\tau + 2)^2 + a_3(\tau + 2)^3 \tag{6}$$

dan  $a_i$  dihitung berdasarkan syarat  $g(-2) = -2, g_\tau(-2) = 0.3, g_{\tau\tau}(-2) = 0$  dan

$\xi(-3) = -3$ . Sedangkan untuk kondisi  $\tau > 2$ , maka diperoleh:

$$g(\tau) = b_0 + b_1(\tau - 2) + b_2(\tau - 2)^2 + b_3(\tau - 2)^3 \tag{7}$$

dengan syarat yang digunakan untuk memperoleh ungkapan  $b_i$  adalah  $g(2) = 2, g_\tau(2) = 0.3, g_{\tau\tau}(2) = 0$  dan  $g(21) = 300$ . Ketika daerah  $-2 < \tau < 2$ , maka:

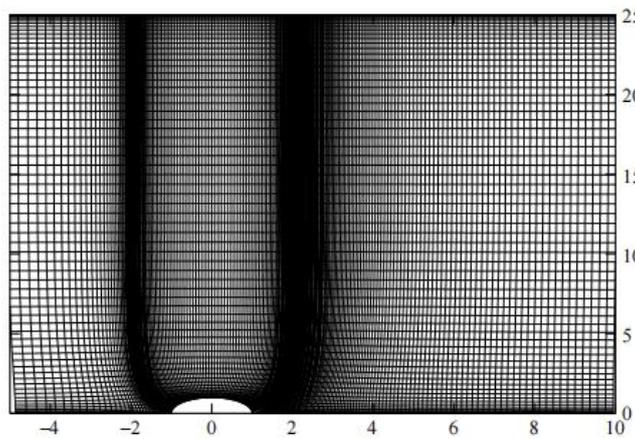
$$g(\tau) = c_0 + c_1\tau + c_2\tau^2 + c_3\tau^3 + c_4\tau^4 + c_5\tau^5 \tag{8}$$

dan  $c_i$  dapat dihitung melalui

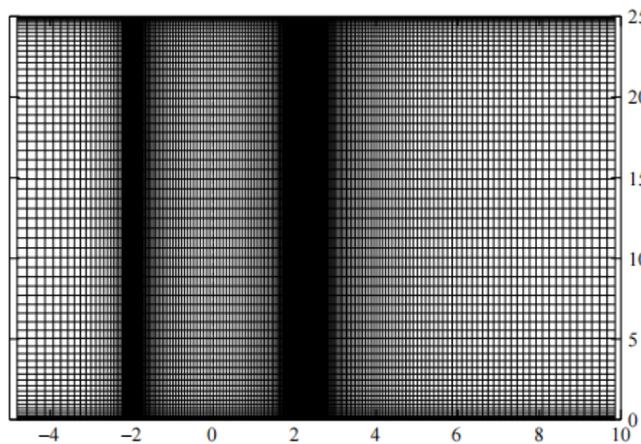
$$\begin{aligned} g(-2) &= -2 \\ g_\tau(-2) &= 0.3 \\ g_{\tau\tau}(-2) &= 0 \\ g(2) &= 2 \\ g_\tau(2) &= 0.3 \\ g_{\tau\tau}(2) &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Dalah arah- $\eta$  memiliki *grid* yang tidak seragam dan titik  $\eta$  terletak di titik kolokasi Chebychev seperti pada gambar 3 dan 4 yang

menunjukkan garis *grid* sebelum dan sesudah pemetaan untuk sampel *grid* kasar.



Gambar 3. Garis Kisi pada Bidang-X



Gambar 4. Garis Kisi pada Bidang-Z

Salah satu kekurangan titik kolokasi Chebychev standar pada domain yang tereduksi  $A, B, C, D, E, F$  adalah adanya pengelompokan yang alami pada titik di dekat batas  $C, D$ . Untuk kasus lebar celah yang lebih besar, maka pendekatan yang mungkin lebih baik adalah menggunakan titik yang berbeda selain memperhatikan simetri seperti yang dijelaskan oleh Fornberg.

**Metode Numerik**

Jika  $\xi = \xi(\tau)$  dengan menggunakan kisi yang seragam di bidang  $\tau$ , maka perlu dicari ungkapan  $\left| \frac{dZ}{dX} \right|^2$  secara numerik pada

setiap kisi  $X_{jk} = x_j + iy_k$ . Dengan demikian, persamaan (1) dan (2) dapat diubah menjadi:

$$\omega + J(A(\tau)\psi_\tau + B(\tau)\psi_{\tau\tau} + \psi_{\eta\eta}) = 0 \tag{10}$$

di mana  $J$  merupakan pemetaan konformal Jacobian, dan:

$$A(\tau)\psi_\tau + B(\tau)\psi_{\tau\tau} + \psi_{\eta\eta} + E(\tau) \frac{R}{2} (\psi_\tau \omega_\eta - \psi_\eta \omega_\tau) = 0 \tag{11}$$

di mana  $A(\tau) = \frac{\partial^2 \tau}{\partial \xi^2}$ ,  $B(\tau) = \left( \frac{\partial \tau}{\partial \xi} \right)^2$ , dan

$$E(\tau) = \frac{\partial \tau}{\partial \xi}$$

Pada bidang- $\tau$ , domain akan terpotong di antara  $\tau_{min} \ll \tau \ll \tau_{max}$ . Dengan demikian,

kisi seragam pada bidang  $\tau$  dapat dituliskan menjadi:

$$\tau_i = \tau_{min} + (i - 1)h, \text{ dengan } i = 1, 2, 3, \dots, m,$$

dan:

$$h = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{m-1} \tag{12}$$

Untuk metode numerik yang digunakan dalam kajian ini adalah metode beda hingga orde empat dalam arah  $\tau$  dan kolokasi Chebychev dalam arah  $\eta$ . Dengan demikian, turunan pertama dan turunan kedua dalam arah  $\tau$  dapat dilakukan diskritisasi melalui perumusan:

$$(\psi_\tau) = \frac{1}{12h} (\psi_{p-2,j} - 8\psi_{p-1,j} + 8\psi_{p+1,j} - \psi_{p+2,j}) \tag{13}$$

$$(\psi_{\tau\tau}) = \frac{1}{12h^2} (-\psi_{p-2,j} + 16\psi_{p-1,j} - 30\psi_{p,j} + 16\psi_{p+1,j} - \psi_{p+2,j}) \tag{14}$$

di mana  $(\psi)_{p,j}$  mengacu pada nilai fungsi aliran pada titik  $\tau_p$  dan  $z_j$ . Dalam hal ini,  $z_j$  adalah titik kolokasi  $\cos(j\pi/n) = , j = 0, \dots, n$ . Daerah  $0 \ll \eta \ll V/2$  dapat dipetakan secara line ke dalam bentuk  $-1 \ll z \ll 1$  dan  $\eta = \eta_j = \left(\frac{V}{4}\right)(z_j + 1)$ , dengan  $j = 0, \dots, n$ .

Dengan demikian, turunan pertama dalam arah  $\eta$  diberikan oleh persamaan:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)_{p,j} = \sum_{k=0}^n D_{j,k} \psi_{p,k} \tag{15}$$

di mana  $D_{j,k}$  adalah elemen matriks diferensiasi kolokasi Chebychev  $\mathbf{D}$ , yang di mana ungkapan serupa dapat dituliskan untuk suku turunan kedua.

Diskritisasi dapat dibentuk menjadi sebuah pengaturan persamaan non-linear. Metode linearisasi Newton-Raphson dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem non-

linear dengan melakukan uji  $\omega_{ij} = \Omega_{ij} + \bar{\omega}_{ij}$ ,  $\psi_{ij} = \psi_{ij} + \bar{\psi}_{ij}$  sedemikian rupa sehingga  $|\Omega_{ij}|, |\psi_{ij}| \ll 1$  dan dapat dieksekusi dengan menggunakan istilah koreksi  $\psi$  dan  $\Omega$  yang menentukan nilai awal suatu titik diskritisasi. Linearisasi ini akan bersama dengan diskritisasi mengarah ke suatu sistem dan membentuk suatu kelinieran yang bentuknya:

$$\mathbf{A}^{(p)}\Phi_{p-2} + \mathbf{B}^{(p)}\Phi_{p-1} + \mathbf{C}^{(p)}\Phi_p + \mathbf{D}^{(p)}\Phi_{p+1} + \mathbf{E}^{(p)}\Phi_{p+2} = \mathbf{F}^{(p)} \tag{16}$$

di mana  $1 \leq p \leq m$  dan  $\Phi_p = (\psi_p, \Omega_p)^T$  adalah vektor fungsi aliran yang tidak diketahui dan koreksi vortisitas pada setiap stasiun  $\tau = \tau_p$  dan:

$$\psi_p = \begin{pmatrix} \psi_{p0} \\ \vdots \\ \psi_{pm} \end{pmatrix}, \Omega_p = \begin{pmatrix} \Omega_{p0} \\ \vdots \\ \Omega_{pm} \end{pmatrix} \tag{17}$$

dengan  $\psi_{pj}$  menunjukkan fungsi aliran pada titik  $\tau = \tau_p$  dan  $\eta = \eta_j$ . Masing-masing matriks koefisien dari persamaan (16) adalah matriks yang timbul dari sistem pada persamaan (1) yang diterapkan pada titik kolokasinya.

Matriks  $\mathbf{A}^{(p)}, \mathbf{B}^{(p)}, \mathbf{C}^{(p)}, \mathbf{D}^{(p)}, \mathbf{E}^{(p)}$  adalah sebuah matriks padat yang berukuran  $2(N + 1)$  dikali  $2(N + 1)$ . Penggunaan orde empat pada  $\tau$  dapat menimbulkan struktur yang pentadiagonal blok pada persamaan (16). Dengan demikian, sistem linear diselesaikan untuk semua vektor  $\Phi_p, 1 \ll p < m$  diselesaikan secara langsung, mengeksploitasi pola *sparsity* dari matriks blok pentadiagonalnya. Jumlah yang tidak diketahui adalah  $2(N + 1)$ . Nilai tipikal  $N$  dan

$m$  yang digunakan dalam kisi halus adalah  $N = 80$  dan  $m = 800$ .

**Alternatif Syarat Batas**

Salah satu yang menjadi kesulitan dalam menggunakan metode kolokasi spektrum dengan formulasi fungsi aliran vortisitas dari kasus Navier-Stokes adalah penerapan syarat batas tanpa adanya selip pada benda. Dalam pendekatan metode beda hingga untuk persamaan Navier-Stokes, beberapa syarat lokal turunan digunakan untuk vortisitas pada permukaan benda. Dalam pendekatan kolokasi spektral ini tidak memadai dan mengarah ke sistem persamaan yang merosot (Ehrenstein dan Peyret, 1989). Teknik yang berbeda harus diadopsi dan dalam kajian ini akan digunakan pendekatan yang dipelopori oleh Davies dan Carpenter di mana beberapa batasan integral akan digunakan sebagai gantinya. Hubungan integral ini dapat diturunkan dari persamaan Navier-Stokes melalui integrasi:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 \tau} = 0 \tag{18}$$

Dan:

$$J \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 \eta} + \omega = 0 \tag{19}$$

dengan  $\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0$  untuk menghilangkan titik-titik yang berada di luar daerah sistem. Pada kondisi  $\eta = 0, V/2$ , maka batas pada  $\psi$  dan  $\omega$  yang akan digunakan.

Kondisi tanpa selip pada permukaan silinder dapat menyebabkan kesulitan yang kompleks dikarenakan kondisi  $\psi = 0$  dan  $\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0$  tidak dapat diterapkan secara langsung karena hal ini menyebabkan sistem

persamaannya mengalami degenerasi. Kesulitan dalam menemukan syarat yang tepat untuk ungkapan  $\omega$  pada permukaan silinder sistem. Dengan demikian, maka perlu didefinisikan ungkapan  $\omega$  dalam bentuk  $\psi$ :

$$J \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \omega = 0 \tag{20}$$

pada nilai  $\eta = 0$  tidak cukup karena hal ini saja tidak menjamin bahwas  $\psi_\eta = 0$  pada  $\eta = 0$  terpenuhi. Syarat batas  $\psi = 0$  dan  $\psi_\eta = 0$  mengimplikasikan batasan integral tertentu pada vortisitas yang harus dipenuhi.

Sebagai ganti untuk kondisi selip pada komponen kecepatan tangensial, maka digunakan kendala integral ganda yang bentuknya sebagai berikut:

$$\left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right\} J + \omega = 0 \tag{21}$$

Sehingga diperoleh ungkapan:

$$\int_{\eta=0}^{V/2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\omega}{J} \right) d\eta + \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right]_{\eta=0}^{V/2} = 0 \tag{22}$$

Persamaan ini digunakan bersama-sama dengan  $\psi = 0$  dengan menggantikan syarat tanpa selip pada  $\eta = 0$ . Uji keakuratan metode ini adalah seberapa baik syarat sistem tanpa adanya pengaruh selip ada batas  $\eta = 0$ . Dapat ditemukan bahwa metode ini memenuhi batas toleransi yang sama dengan sis persamaan diskrit yang bersesuaian dengan metode numerik yang dikerjakan oleh Azzam (Azzam,2003).

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

Hasil untuk aliran yang melewati kaskade silinder sirkuler diperoleh untuk bebragai nilai bilangan Reynolds dan berbagai

lebar celah. Penelusuran yang lebih ekstensif telah dilakukan untuk memvalidasi kode program dan memeriksa indenpendensi kisi serta pemotongan daerah baik hulu maupun hilir. Biasanya perhitungan dilakukan dengan 81 simpul Chebychev dan antara 600 dan 800 titik pada arah  $\xi$ . Telah ditemukan bahwa perhitungan paling sensitif terhadap lokasi batas hulu untuk lebar celah yang besar. Namun sebagian besar perhitungan  $\tau_{min} = -7$  (dengan nilai  $x_{min}$  yang sesuai antara  $-100$  dan  $-90$ ) digunakan dan penurunan  $\tau_{min}$  yang tidak menyebabkan perubahan signifikan pada hasil yang diperoleh. Sedangkan untuk nilai  $\tau_{max}$  dapat ditetapkan ke nilai yang cukup besar untuk memastikan bahwa pusaran yang terkandung dalam daerah komputasi. Menetapkan  $\tau_{max}$  akan menjadi lebih kecil dari panjang pusaran yang mengakibatkan hanya sebagian pusaran yang dihitung. Syarat batas yang digunakan pada ujung hilir memungkinkan pusaran untuk keluar dengan lancar dari wilayah yang telah ditentukan sebelumnya.

Sedangkan dalam bidang- $\eta$  untuk titik kolokasi standar  $\eta_j = \cos(j\pi/M)$  telah digunakan. Kecuali untuk beberapa titik dalam ruang- $R$  dan khususnya untuk  $W$  besar, maka pola konvergensinya adalah kuadratik dan solusinya diperoleh dalam iterasi Newton. Solusi pada nilai bilangan Reynolds sebelumnya telah digunakan sebagai nilai awal pada sebagian besar perhitungan. Adapun beberapa kesulitan dalam konvergensi dialami untuk  $W = 100$  dan dekat  $R = 400$  di maan

untuk nilai selanjutnya yang beradal dalam ruang- $R$  mengalami peningkatan yang sangat kecil dalam  $R$ . Alasan kesulitan dalam konvergensi pada beberapa titik dalam ruang parameter dapat dikaitkan dengan perubahan sifat solusi di dekat nilai kritis, seperti perubahan sensitivitas terhadap perubahan ukuran kisi di dekat nilai tersebut.

Selain itu, untuk melakukan uji ketergantungan kisi yang luas, maka perlu diperiksa hasil yang diperoleh pada kisi terbaik adalah kisi yang independen. Perilaku berbagai sifat aliran seperti panjang pusaran dan lebarnya, vortisitas maksimum pada permukaan silinder dan koefisien hambatannya dibandingkan sejumlah titik-titik yang bervariasi dalam arah- $\tau$  dan sejumlah titik kolokasi Chebychev yang bervariasi. Gambar yang menunjukkan hasil perbandingan ini dan studi ketergantungan kisi pada kantor JFM, Cambridge. Mereka telah menyelesaikan sepenuhnya pada kisi-kisi terbaik yang digunakan untuk lebar celah ini. Untuk lebar celah  $W = 5$  bahkan untuk kisi kasarnya paling sedikit terdapat 32 titik Chebychev pada arah vertikal sudah cukup untuk mendapatkan hasil yang masuk akal.

Namun hal yang sama tidak dapat berlaku untuk meningkatkan lebar celah. Panjang pusaran tampak sebagai besaran yang paling sensitif untuk dapat dihitung secara akurat. Untuk  $W = 50$ , maka panjang pusaran akan sensitif terhadap jumlah titik yang digunakan dan keakuratannya juga akan bergantung pada bilangan Reynolds.

Setidaknya terdapat 64 titik dengan nilai  $h = 1/20$  yang diperlukan untuk bilangan Reynolds rendah dalam kasus ini. Untuk bilangan Reynolds yang lebih tinggi ( $R > 800$ ), maka jumlah titik-titik Chebychev yang diperlukan untuk menyelesaikan fitur aliran yang meningkat. Pada saat bilangan Reynolds yang lebih besar, maka hasil untuk panjang pusaran pada kisi yang terbaik ( $N = 100, h = 1/30$ ) dengan menghasilkan nilai yang konvergen khususnya untuk lebar pusaran dan hambatannya.

Untuk kasus lebar celah  $W = 100$  bahkan akan lebih sulit untuk dihitung secara akurat untuk menentukan bilangan Reynolds yang tinggi. Satu-satunya kuantitas yang dapat dihitung yang tidak bergantung pada kisi adalah lebar pusaran. Namun panjang pusaran dapat secara akurat hingga mencapai  $R = 700$ . Pada bilangan Reynolds 800, terdapat sekitar 10% perbedaan hasil antara tiga model kisi terbaik yang digunakan. Pada angka Reynolds yang lebih besar, maka akan memberikan perbedaan yang jauh lebih besar.

Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa untuk lebar celah yang kecil, fitur aliran dapat diselesaikan dengan menggunakan kisi yang cukup kasar. Sedangkan untuk lebar celah yang lebih besar maka dengan menggunakan kisi kasar dapat menyebabkan perbedaan besar dalam sifat solusi keseluruhan, terutama untuk panjang pusaran. Hal ini tidak mungkin untuk menghitung dengan kisi yang lebih halus karena keterbatasan sumber daya komputer.

## DAFTAR PUSTAKA

- Acrivos, A., Leal, L., Snowden, D. & Pan, F. 1968 Further experiments on steady separated flow past bluff objects. *J. Fluid Mech.* 34, 25–48
- Acrivos, A., Snowden, D., Grove, A. & Petersen, E. 1965 The steady flow past a circular cylinder at large Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* 21, 737–760.
- Batchelor, G. 1956 A proposal concerning laminar wakes behind bluff bodies at large Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* 1, 177–190.
- Bhattacharya, S., Dennis, S. & Smith, F. 2001 Separating flow past a surface-mounted blunt obstacle. *J. Engng Maths* 39, 47–62.
- Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quaternoni, A. & Zang, T. 1987 *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer
- Castro, I. 2002 Weakly stratified laminar flow past normal flat plates. *J. Fluid Mech.* 454, 21–46.
- Chernyshenko, S. 1988 The asymptotic form of the stationary separated circumference of a body at high Reynolds numbers. *Prikl. Matem. Mekh.* 52, 958–966.
- Chernyshenko, S. 1993 Stratified flow in a channel. *J. Fluid Mech.* 250, 423–431
- Chernyshenko, S. 1998 Asymptotic theory of global separation. *Appl. Mech. Rev.* 51, 523–535.
- Chernyshenko, S. & Castro, I. 1993 High-Reynolds number asymptotics of the steady flow through a row of bluff bodies. *J. Fluid Mech.* 257, 421–449.
- Chernyshenko, S. & Castro, I. 1996 High Reynolds number weakly stratified flow past an obstacle. *J. Fluid Mech.* 317, 155–178.

- Davies, C. & Carpenter, P. 1997 Numerical simulation of the evolution of Tollmien-Schlichting waves over finite compliant panels. *J. Fluid Mech.* 352, 205–243.
- Ehrenstein, E. & Peyret, R. 1989 A chebychev collocation method for the Navier–Stokes equations with application to double-diffusive convection. *Intl J. Numer. Meth. Fluids* 9, 427–452.
- Fornberg, B. 1980 A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder. *Intl J. Numer. Meth. Fluids* 98, 819–855.
- Fornberg, B. 1983 Steady viscous flow past a circular cylinder. *NASA Conf Publ* 2295, pp. 201–224.
- Fornberg, B. 1985 Steady viscous flow past a circular cylinder up to Reynolds number 600. *J. Comput. Phys.* 61, 297–320.
- Fornberg, B. 1991 Steady incompressible flow past a row of circular cylinders. *J. Fluid Mech.* 225, 655–671.
- Fornberg, B. 1998 *A Practical Guide to Pseudospectral Methods*. Cambridge University Press.
- Ingham, D., Tang, T. & Morton, B. 1990 Steady two-dimensional flow through a row of normal flat plates. *J. Fluid Mech.* 210, 281–302.
- Kirchoff, G. 1869 Zur theorie freierflüssigkeits strahlen. *J. Reine Angew Math Bd* 70(H4), 289–298.
- Milos, F. & Acrivos, A. 1986 Steady flow past sudden expansions at large Reynolds numbers Part i. Boundary layer solutions. *Phys. Fluids* 29, 1353–1359.
- Milos, F. & Acrivos, A. 1987 Steady flow past sudden expansions at large Reynolds numbers. Part ii. Navier–Stokes solutions for the cascade expansion. *Phys. Fluids* 30, 7–18.
- Natarajan, R., Fornberg, B. & Acrivos, A. 1993 Flow past a row of flat plates at large Reynolds numbers. *Proc. R. Soc. Lond. A* 441, 211–235.
- Peregrine, H. 1985 A note on the steady high Reynolds number flow past a circular cylinder. *J. Fluid Mech.* 157, 493–500.
- Sadovskii, V. 1970 A region of uniform vorticity in plane potential flow. *Uch. Zap. TsAGI* 1 (4), 1–9.
- Sadovskii, V. 1971 On local properties of vortex flows. *Uch. Zap. TsAGI* 3 (4), 117–120.
- Smith, F. 1979 Laminar flow of an incompressible fluid past a bluff body: The separation, reattachment, eddy properties and drag. *J. Fluid Mech.* 92, 171–205.
- Smith, F. 1985a On large-scale eddy closure. *J. Math. Phys. Sci.* 19, 1–80.
- Smith, F. 1985b A structure for laminar flow past a bluff body at large Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* 155, 175–191.
- Sychev, V. 1967 On steady laminar flow behind a bluff body at high Reynolds numbers. In *Proc. 8th Symposium on Current Problems of the Mechanics of Liquids and Gases*. Tarda, Poland.
- Sychev, V. 1982 Asymptotic theory of separated flows. *Izv. AN SSSR, Mekh Zhidki* 2, 20–30.
- Taganov 1968 Contribution to the theory of stationary separation zones. *Izv. AN SSSR Mekh Zhidki Gaza* 5, 3–19.